BAB III
DETERMINAN MATRIKS

A. Definisi Determinan

Misalkan A matriks persegi, fungsi determinan A sering dituliskan sebagai determinan (disingkat det (A) atau |A|) didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A.

Jika A berukuran $\times n$, maka hasil kali elementer dari matriks A akan berbentuk: $a_{1p1}.a_{2p2} \ldots a_{npn}$ dimana $p_1p_2 \ldots p_n$ merupakan permutasi dari bilangan – bilangan 1,2, … , n. Tanda dari $a_{1p1}.a_{2p2} \ldots a_{npn}$ sendiri ditentukan dari banyaknya bilangan bulat besar yang mendahului bilangan yang lebih kecil (banyaknya invers) pada bilangan $p_1p_2 \ldots p_n$, jika banyaknya invers adalah ganjil maka tandanya negatif (–) dan jika sebaliknya tandanya positif (+).

Contoh 3.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Tentukan det (A)!

Jawab

Banyaknya permutasi 1,2 (karena A berukuran 2 × 2) = 2 yaitu 12 dan 21 Pada bilangan 12 akan didapatkan banyaknya invers = 0 sehingga tanda untuk hasil kali elementer $a_{11}.a_{22}$ adalah (+), sedangkan untuk hasil kali elementer $a_{12}.a_{21}$ akan bertanda (–) karena pada bilangan 21 terdapat satu angka bulat yang mendahului angka yang lebih kecil.

Jadi det (A) = $+a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} = ad - bc$.

Contoh 3.2

Diketahui $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tentukan det (B)!

Jawab

Untuk mempermudah, akan dibuat tabel berikut:

permutasi	Hasil kali elementer	Banyak invers	Hasil kali elementer bertanda
123	$a_{11}.a_{22}.a_{33}$	0	$+a_{11}.a_{22}.a_{33}$
132	$a_{11}.a_{23}.a_{32}$	1	$-a_{11}.a_{23}.a_{32}$
213	$a_{12}.a_{21}.a_{33}$	1	$-a_{12}.a_{21}.a_{33}$
231	$a_{12}.a_{23}.a_{31}$	2	$+a_{12}.a_{23}.a_{31}$
312	$a_{13}.a_{21}.a_{32}$	2	$+a_{13}.a_{21}.a_{32}$
321	$a_{13}.a_{22}.a_{31}$	3	$-a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Jadi, det (B) = $+a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Untuk kasus matriks yang berukuran lebih dari 3x3 , tentunya penentuan nilai determinan dengan menggunakan definisi tersebut menjadi kurang efektif dan lebih rumit. Berdasarkan definisi dari determinan tersebut maka dikembangkan metode perhitungan determinan yang lebih cepat yang akan dibahas dibagian selanjutnya.

B. Metode Perhitungan Determinan

1. Ekspansi Kofaktor

Pada metode ini dikenal beberapa istilah, antara lain:

Minor elemen a_{ij} (M_{ij}) yaitu determinan yang didapatkan dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j matriks awalnya.

Kofaktor elemen a_{ij} (C_{ij}) = $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Jika A matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$, maka dengan menggunakan metode ini perhitungan determinan dapat dilakukan dengan dua cara yang semuanya menghasilkan hasil yang sama yaitu:

~ ekspansi sepanjang baris i

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

~ ekspansi sepanjang kolom j

$$det(A) = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \dots + a_{ni}C_{ni}$$

Contoh 3.3

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan det (A) dengan menggunakan ekspansi kofaktor!

Jawab

Akan dicoba menggunakan ekspansi baris 1 untuk menghitung det (A)

det (A) = $a_{11}C_{11}$ + $a_{12}C_{12}$ + $a_{13}C_{13}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 4) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

Jadi $det\ (A)\ =\ (1\,.-1) + (2\,.\,2) + (3\,.-2)\ =\ -3$

Contoh 3.4

Diketahui $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hitung det (B)!

Jawab

Jika melihat sifat dari metode ini , maka perhitungan akan lebih cepat jika ada elemen a_{ij} yang bernilai 0. Jadi pemilihan baris/ kolom akan sangat menetukan perhitungan.

Dalam contoh ini terlihat bahwa baris/kolom yang mengandung banyak nilai 0 adalah kolom 2. Jadi det (B) akan dapat dihitung secara cepat menggunakan ekspansi terhadap kolom 2.

det (B) = $a_{12}C_{12}$ + $a_{22}C_{22}$ + $a_{32}C_{32}$ = $a_{22}C_{22}$ (karena a12 dan a32 bernilai 0)

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Jadi det(B) = 2 . -2 = -4

2. Reduksi Baris Menggunakan Operasi baris Elementer

Penggunaan metode ini sebenarnya tidak lepas dari metode ekspansi kofaktor yaitu pada kasus suatu kolom banyak mengandung elemen yang bernilai 0. Berdasarkan sifat ini maka matriks yang berbentuk eselon baris atau matriks segitiga akan lebih mudah untuk dihitung nilai determinannya karena hanya merupakan perkalian dari elemen diagonalnya. Reduksi baris dilakukan dengan mengubah kolom – kolom sehingga banyak memuat elemen 0. Biasanya bentuk metriks akhir yang ingin dicapai adalah bentuk eselon baris atau bentuk segitiga tetapi ini tidak mutlak. Jika bentuk eselon atau segitiga belum tercapai tetapi dianggap perhitungannya sudah cukup sederhana maka determinan bisa langsung dihitung. Dalam melakukan reduksi baris operasi yang digunakan adalah operasi baris elementer.

Pada operasi baris elementer ada beberapa operasi yang berpengaruh terhadap nilai determinan awal, yaitu:

- Jika matriks B diperoleh dengan mempertukarkan dua baris pada matriks A maka det (B) = - det (A)
- Jika matriks B diperoleh dengan mengalikan konstanta k ke salah satu baris matriks A maka det (B) = k det (A)
- Jika matriks B didapatkan dengan menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya, maka det (B) = det (A)

Contoh 3.5

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan det (A) dengan menggunakan reduksi baris!

Jawab

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = (-2).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = (-2).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2).1.1.\,3/2 = -3$$

C. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode Crammer

Metode Crammer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu SPL yang berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks bujur sangkar dapat dikerjakan dengan metode Crammer jika hasil perhitugan menunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$. Penyelesaian yang didapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal.

Diketahui suatu sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan $\det(A) \neq 0$ sedangkan nilai $\bar{x}$ dan $\bar{b}$ adalah:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka penyelesaian untuk x adalah:

$\overline{x_1} = \frac{|A_1|}{|A|}$, $\overline{x_2} = \frac{|A_2|}{|A|}$, ..., $\overline{x_n} = \frac{|A_n|}{|A|}$

A_i adalah matriks A yang kolom ke–i nya diganti dengan vektor $\bar{b}$.

Contoh 3.6

Diketahui sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Periksa apakah metode Crammer dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian SPL?
2. Jika bisa, tentukan penyelesaian untuk *x*

Jawab

a. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(-1)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 20) - (6 - 10) = -1$

Karena det (A) = –1 maka metode Crammer dapat digunakan.

b. $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(1)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 20) - (3 + 5) = -3$

$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 5) + (6 - 10) = 4$

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Jadi nilai untuk *x*, *y* dan *z* adalah:

$\overline{x_1} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$, $\overline{x_2} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4$ $\overline{x_3} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$

Menentukan invers suatu matriks dapat juga menggunakan rumus berikut:

$A^{-1} = \frac{adj\ (A)}{|A|}$ dimana $adj\ (A) = C^t$ dan $C = \{c_{ij}\}$, c_{ij} = kofaktor elemen a_{ij}

D. Hubungan Determinan, Invers Matriks dan Penyelesaian untuk Sistem Persaman Linier

Jika suatu SPL berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dan A matriks persegi, maka sifat dari penyelesaian SPL dapat diketahui dari nilai determinan A atau invers matriks A. Berikut ini adalah hubungan yang berlaku:

$\det(A) \neq 0 \;\leftrightarrow\; A^{-1}$ terde inisi (ada) $\leftrightarrow$ penyelesaian tunggal untuk SPL

$\det(A) = 0 \;\leftrightarrow\; A^{-1}$ tidak terde inisi (tidak ada)

$\det(A) = 0 \leftrightarrow$ SPL tidak memiliki penyelesaian

SPL memiliki penyelesaian banyak

Pada kasus $\det(A) \neq 0$ untuk menentukan penyelesaiannya dapat digunakan invers matriks untuk menghitungnya, yaitu $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Sedangkan pada kasus $\det(A) = 0$, untuk menentukan penyelesaian SPL harus digunakan eliminasi Gauss–Jordan pada matriks diperbesar $[A|b]$.

Latihan III

1. Gunakan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan dari matriks – matriks berikut:

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Gunakan reduksi baris untuk menghitung determinan dari matriks – matriks berikut:

   a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Diketahui sistem persamaan linear berikut:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   a. Periksa apakah metode Crammer dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian SPL?
   b. Jika ya, tentukan nilai untuk *x* !