

BAB IV

RUANG – RUANG VEKTOR

A. Ruang – n Euclides

Pada saat pertama kali ilmu vektor dikembangkan, hanya dikenal vektor – vektor di R^2 dan R^3 saja, tetapi dalam perkembangannya ternyata didapatkan permasalahan yang lebih kompleks sehingga dikembangkan vektor – vektor di ruang berdimensi 4, 5 atau secara umum merupakan vektor – vektor di R^n . Secara geometris memang vektor – vektor di R^4 dan seterusnya memang belum bisa digambarkan, tetapi dasar yang digunakan seperti operasi – operasi vector masih sama seperti operasi pada vektor – vektor di R^2 dan R^3 . Orang yang pertama kali mempelajari vektor – vektor di R^n adalah Euclides sehingga vektor – vektor yang berada di R^n dikenal sebagai vektor Euclides, sedangkan ruang vektornya disebut ruang –n Euclides.

Operasi standar / baku pada vektor Euclides

Diketahui \bar{u} dan \bar{v} adalah vektor – vektor di ruang –n Euclides dengan

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ dan } \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Penjumlahan vektor

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Perkalian titik

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n)$$

Perkalian dengan skalar

$$k\bar{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

Panjang vektor

$$\|\bar{u}\| = (\bar{u} \cdot \bar{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Jarak antara vektor

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh 4.1

Diketahui $\bar{a} = (2, 1, 2, 1)$ dan $\bar{b} = (1, 1, 2, 2)$

Tentukan jarak antara \bar{a} dan \bar{b} !

Jawab

$$\begin{aligned} d(\bar{a}, \bar{b}) &= \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

B. Ruang vektor umum

Selama ini kita telah membahas vektor – vektor di R^n Euclides dengan operasi – operasi standarnya. Sekarang akan membuat konsep tentang ruang vector dengan konsep yang lebih luas.

Ada 10 syarat agar V disebut sebagai ruang vektor, yaitu:

1. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ maka $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$
4. $\exists 0 \in V$ sehingga $\forall \bar{u} \in V$ maka $0 + \bar{u} = \bar{u}$ dan $\bar{u} + 0 = \bar{u}$
5. $\forall \bar{u} \in V, \exists -\bar{u} \in V$ sehingga $\bar{u} + (-\bar{u}) = 0$ dan $(-\bar{u}) + \bar{u} = 0$
6. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k$ adalah scalar maka $k\bar{u} \in V$
7. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k$ adalah skalar maka $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
8. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k, l$ adalah skalar maka $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$
9. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k, l$ adalah skalar maka $(kl)\bar{u} = k(l\bar{u})$
10. $\forall \bar{u} \in V$ maka $1\bar{u} = \bar{u}$ dan $\bar{u}1 = \bar{u}$

Dalam hal ini tentunya yang paling menentukan apakah V disebut ruang vector atau tidak adalah operasi – operasi pada V atau bentuk dari V itu sendiri. Jika V merupakan ruang vektor dengan operasi – operasi vektor (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) yang bukan merupakan operasi standar, tentunya V harus memenuhi 10 syarat diatas, jika satu saja syarat tidak dipenuhi maka tentunya V bukan merupakan ruang vektor.

Contoh 4.2

Tunjukkan bahwa V yaitu himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix}$ dengan operasi standar bukan merupakan ruang vektor, $a, b, c \in R!$

Jawab

Untuk membuktikan V bukan merupakan ruang vektor adalah cukup dengan menunjukkan bahwa salah satu syarat ruang vektor tidak dipenuhi. Dan syarat

pertama ternyata tidak dipenuhi. Sehingga untuk menunjukkannya, kita cukup memberikan satu contoh kontradiksi, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \in V \text{ dan } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in V \text{ maka } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \notin V$$

Jadi V bukan merupakan ruang vektor

C. Sub-ruang vektor

Diketahui V ruang vektor dan U subhimpunan V . Kemudian U dikatakan sub – ruang dari V jika memenuhi dua syarat berikut:

1. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in U$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in U$
2. $\forall \bar{u} \in U$ dan $\forall k$ adalah scalar maka $k\bar{u} \in V$

Contoh 4.3

Diketahui: $V = R^3$

$$U = \{(a, b, c) | b = a + c, a, b, c \in R\}$$

Tunjukkan bahwa U sub-ruang V .

Jawab

1. Ambil sebarang $\bar{u}, \bar{v} \in U$ akan dibuktikan $\bar{u} + \bar{v} \in U$

$$\text{Misal } \bar{u} = (a_1, b_1, c_1) \text{ dengan } b_1 = a_1 + c_1$$

$$\bar{v} = (a_2, b_2, c_2) \text{ dengan } b_2 = a_2 + c_2$$

$$\bar{u} + \bar{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \text{ dengan } b_1 + b_2 = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2)$$

$$b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$$

Ini berarti terbukti bahwa $\bar{u} + \bar{v} \in U$

2. Ambil sebarang $\bar{u} \in U$ dan k sebarang skalar akan dibuktikan $k\bar{u} \in U$

$$\text{Misal } \bar{u} = (a_1, b_1, c_1) \text{ dengan } b_1 = a_1 + c_1$$

$$k\bar{u} = k(a_1, b_1, c_1) = (ka_1, kb_1, kc_1) \text{ dengan } kb_1 = k(a_1 + c_1)$$

$$kb_1 = ka_1 + kc_1$$

Ini berarti terbukti bahwa $k\bar{u} \in U$

Dari 1 dan 2, maka U sub-ruang V

D. Kombinasi linier

Vektor \bar{v} dikatakan merupakan kombinasi linier dari vektor – vector $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ jika \bar{v} dapat dinyatakan sebagai:

$$\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \dots + k_n\bar{v}_n \text{ dengan } k_1, k_2, \dots, k_n \text{ adalah skalar}$$

Contoh 4.4

$(9, 2, 7)$ adalah kombinasi linear dari $(1, 2, -1)$ dan $(6, 4, 2)$, sebab:

$$(9, 2, 7) = -3(1, 2, -1) + 2(6, 4, 2)$$

Contoh 4.5

Diketahui $\bar{a} = (1, 2)$, $\bar{b} = (-2, -3)$ dan $\bar{c} = (1, 3)$

Apakah \bar{c} merupakan kombinasi linier dari \bar{a} dan \bar{b} ?

Jawab

Misalkan \bar{c} merupakan kombinasi linier dari \bar{a} dan \bar{b} , maka dapat ditentukan

nilai untuk k_1 dan k_2 dari persamaan $\bar{c} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Digunakan operasi baris elementer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier di atas, yaitu:

$$\left[A \mid \bar{b} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Diperoleh,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nilai k_1 dan k_2 bisa diperoleh, jadi \bar{c} merupakan kombinasi linier dari \bar{a} dan \bar{b} yaitu

$$\bar{c} = 3\bar{a} + \bar{b}$$

E. Membangun

Diketahui V ruang vektor dan $S = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n\}$ dimana $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n \in V$. S dikatakan membangun V jika:

$\forall \bar{v} \in V$, maka \bar{v} merupakan kombinasi linier dari S , yaitu:

$$\bar{v} = k_1\bar{s}_1 + k_2\bar{s}_2 + \dots + k_n\bar{s}_n \text{ dengan } k_1, k_2, \dots, k_n \text{ adalah skalar}$$

Contoh 4.6

Periksa apakah $S = \{(1, 2), (1, 3)\}$ membangun R^2 !

Jawab

Ambil sebarang $\bar{u} \in R^2$, Misal $\bar{u} = (a, b)$, maka

$$\begin{aligned} (a, b) &= k_1(1, 2) + k_2(1, 3) \\ &= (k_1, 2k_1) + (k_2, 3k_2) \\ &= (k_1 + k_2, 2k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

$$a = k_1 + k_2 \rightarrow k_1 = a - k_2$$

$$b = 2k_1 + 3k_2$$

$$b = 2(a - k_2) + 3k_2$$

$$b = 2a - 2k_2 + 3k_2$$

$$b = 2a + k_2 \rightarrow k_2 = b - 2a$$

$$k_1 = a - k_2$$

$$k_1 = a - (b - 2a)$$

$$k_1 = 3a - b$$

Karenaa diperoleh $k_1 = 3a - b$ dan $k_2 = b - 2a$, ini berarti $S = \{(1,2), (1,3)\}$ membangun R^2

F. Bebas Linear

Vektor – vektor di S dikatakan bebas linier jika persamaan

$$\vec{0} = k_1\vec{s}_1 + k_2\vec{s}_2 + \dots + k_n\vec{s}_n \text{ hanya memiliki penyelesaian } k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

(atau jika diubah ke bentuk SPL, penyelesaiannya adalah trivial), jika ada penyelesaian lain untuk nilai k_1, k_2, \dots, k_n selain 0 maka dikatakan vektor – vektor di S bergantung linier.

Contoh 4.7

Periksa apakah $S = \{(1,2), (1,3)\}$ bebas linear!

Jawab

$$\begin{aligned}(0,0) &= k_1(1,2) + k_2(1,3) \\ &= (k_1, 2k_1) + (k_2, 3k_2) \\ &= (k_1 + k_2, 2k_1 + 3k_2)\end{aligned}$$

$$0 = k_1 + k_2 \rightarrow k_1 = -k_2$$

$$0 = 2k_1 + 3k_2$$

$$0 = 2(-k_2) + 3k_2$$

$$0 = -2k_2 + 3k_2$$

$$0 = k_2 \rightarrow k_2 = 0$$

$$k_1 = -k_2$$

$$k_1 = 0$$

Karena diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$, ini berarti $S = \{(1,2), (1,3)\}$ bebas linear

G. Basis

Misalkan V ruang vektor dan $S = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n\}$. S disebut basis dari V jika memenuhi dua syarat, yaitu:

1. S bebas linier
2. S membangun V

Contoh 4.8

Berdasarkan contoh 4.6 dan contoh 4.7 maka $S = \{(1,2), (1,3)\}$ dari R^2

Latihan IV

1. Tentukan apakah W dengan operasi standar merupakan sub–ruang M_{22} , jika

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = -d, a, b, c, d \in R \right\}$$

2. Tentukan apakah W dengan operasi standar merupakan sub–ruang M_{22} , jika

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$$

3. Diketahui: $U = \{A, B, C, D\}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Apakah U membangun M_{22} ?
- Apakah U bebas linear?
- Apakah U basis M_{22} ?